**GEOMETRIA ANALITICA e la REALTA’**

**Prefazione**  *“Fino a quando l’algebra e la geometria*

*avanzarono su sentieri separati il loro progresso*

*fu lento e le loro applicazioni limitate.*

*Ma quando queste due scienze unirono le loro*

*forze, esse trassero l’una dall’altra fresca*

*vitalità e da allora in poi marciarono a rapidi*

*passi verso la perfezione”*

**(J.-L. Lagrange, OC, VII, p. 271)**

La geometria analitica è una branca della matematica che studia la **geometria lineare** in riferimento agli assi coordinati, ovvero ad una coppia di assi ortogonali tra di loro e di lunghezza infinita, che generalmente vengono indicati con le lettere x e *y*. Proprio perché questo tipo di geometria si studia sul piano cartesiano, individuato dai suddetti assi, essa è anche nota come **geometria cartesiana**.

La principale caratteristica è che ogni punto dello spazio, appartenente al piano cartesiano, è individuato da una **coppia ordinata** di numeri, che ne indicano la posizione esatta rispetto all’asse *x* e all’asse *y*.

Ad esempio, per quanto riguarda la retta, in geometria analitica si possono studiare l’equazione della retta, la sua pendenza, il fascio di rette da essa generato, i piani che può generare e tanto altro. Le stesse considerazioni valgono per gli altri enti geometrici: avremo quindi lo studio dell’equazione della parabola, i fasci di parabole, ma anche di circonferenze e di ellissi.

Inoltre, conoscendo le coordinate nello spazio di una qualsiasi figura e conoscendo le corrette relazioni da utilizzare, è possibile calcolare l’**area** della figura, quindi ad esempio l’area sottostante compresa fra due rette o tre rette secanti.

**Utilità**

La geometria analitica è una branca della matematica molto utile in numerosi settori e per vari motivi.  
Innanzitutto, il fatto di fare riferimento ad un piano in cui ciascun punto è univocamente determinato da una coppia ordinata di numeri dà la possibilità di tracciare il grafico univoco della figura geometrica in questione, ma anche di qualsiasi funzione matematica. Inoltre, con particolare riferimento alla retta, la geometria analitica insegna a calcolarne la pendenza, informazione molto importante in numerosi ambiti, come la fisica, l’economia o l’elettrotecnica.

Tali materie si avvalgono del supporto della geometria analitica:

* la fisica usa il piano cartesiano per rappresentare i moti e le traiettorie dei corpi;
* l’economia, sfrutta la geometria analitica per la costruzione dei grafici relativi all’andamento di una variabile;
* l’elettrotecnica fa utilizzo del piano cartesiano per la rappresentazione grafica delle caratteristiche di uscita degli elementi di un circuito elettrico.

Naturalmente questi sono solo degli esempi, ma la geometria analitica trova numerosissime applicazioni, anche nelle materie più impensabili, come ad esempio la rappresentazione della crescita di una coltura di batteri allevati in laboratorio, oppure per disegnare la relazione matematica fra la quantità di calore assorbita da un corpo e la natura del corpo e la differenza di temperatura del corpo e l’ambiente circostante.

Ad esempio:”

*“Un metodo per studiare l'accrescimento animale delle varie specie di animali è quello di seguire i cambiamenti della lunghezza dell'animale nel tempo. Si verifica sperimentalmente che la* ***velocità di crescita v*** *è in generale legata all'età dell'animale da una* ***legge lineare: V=k/t*** *Dove* ***k è la costante d'accrescimento*** *che varia da specie a specie.  
Nel caso dell'uomo K = 0,5 ma bisogna precisare che non tutti gli organi crescono nello stesso rapporto, in generale la crescita nell'uomo è allometrica. Altri organi come mani e piedi hanno una crescita isometrica (infatti quante volte le nostre mamme ci hanno misurato i calzini avvolgendoli al pugno della mano!!) quindi la legge che lega la lunghezza della mano a quella dei piedi è sicuramente lineare.”*

Moto rettilineo uniforme

Dopo aver introdotto i concetti fondamentali che servono a studiare la cinematica, ossia:

* traiettoria
* legge oraria
* [velocità](http://digilander.libero.it/danilo.mauro/temi/cinematica1.html)
* [accelerazione](http://digilander.libero.it/danilo.mauro/temi/cinematica2.html)

andremo ora a studiare alcuni esempi particolari di moto. Il primo esempio di moto che consideriamo è il moto rettilineo uniforme, ossia un moto che avviene su una traiettoria rettilinea con velocità costante. Quindi un corpo si muoverà percorrendo lo stesso spazio, nello stesso tempo. Pertanto, se un corpo si muove con una velocità di 50 m/s, vuol dire che in 2 secondi percorrerà 100 m e, in 10 secondi avrà percorso …..

Ora se provi a mettere su un piano cartesiano **per le ascisse (X) il tempo** e per **le ordinate (Y) lo spazio**, allora il grafico che otteniamo sarà una retta. Abbiamo scelto di attribuire il tempo alla variabile indipendente perché esso è arbitrario, ovvero è scelto liberamente, mentre lo spazio è la variabile dipendente perché la sua percorrenza dipende dalla velocità, infatti maggiore è la velocità, maggiore sarà lo spazio percorso. Crescono entrambi e diminuiscono entrambi, ma nella stessa misura!!!

Prova compilando la tabella:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| TEMPO (s) | SPAZIO (m) | VELOCITA (m/s) spazio/tempo |
| 10 | 100 | 100/10 = 10 |
| 20 | 200 | 200/20 = 10 |
| 30 | 300 | 300/30 = 10 |
|  | 400 | 400/40 = 10 |
| 50 |  | 500/50 = 10 |

Se tu dovessi rappresentare un oggetto che si muove con moto rettilineo uniforme ad una velocità di 90 m/s, con una tabella, cosa scriveresti?! Completa queste operazioni!!

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| TEMPO (s) | SPAZIO (m) | VELOCITA (m/s) spazio/tempo |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Ad ogni istante di tempo t il corpo occuperà un determinato punto lungo la traiettoria che verrà univocamente determinato dal valore dell'ascissa s sull'asse di riferimento. Dal momento che la velocità di un corpo v è definita come v = Δs / Δt, se v è costante anche il rapporto Δs / Δt è costante. Questo vuol dire che lo spazio percorso Δs e l'intervallo di tempo impiegato a percorrerlo Δt sono [direttamente proporzionali](http://digilander.libero.it/danilo.mauro/temi/propdiretta2.html).

Δs indica la variazione di spazio (y2-y1); y2 è il valore maggiore, y1 quello minore.

Δt indica la variazione di tempo (x2-x1); x2 è il valore maggiore, x1 quello minore.

Dalla definizione stessa di velocità possiamo ricavarci la [legge oraria](http://digilander.libero.it/danilo.mauro/temi/cinematica.html) del moto rettilineo uniforme.

Per prima cosa, invertendo la definizione di velocità (V = s/t) → s = v•t

oppure

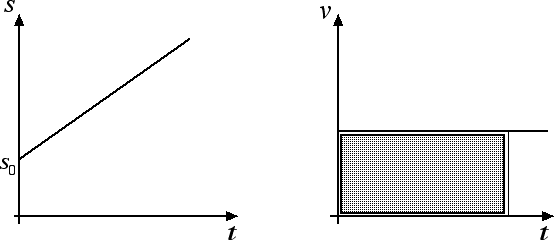
otteniamo **Δs = v · Δt**, con **v** costante.

Tale relazione può essere riscritta come **s = s0 + v · t**, dove **s0** è la posizione occupata dal corpo all'istante **t**, mentre s è la posizione occupata dal corpo all'istante di tempo generico t. Come caso particolare, consideriamo il caso in cui l'istante iniziale t0 coincide con il momento in cui facciamo partire il cronometro. Questa relazione matematica che lega lo spazio s occupato da un corpo alla velocità e il tempo impiegato si chiama **legge oraria del moto rettilineo uniforme: s = s0 + v · t.**

Tale relazione ci dice che, per conoscere la posizione del corpo s ad ogni istante di tempo t, dobbiamo conoscere la posizione iniziale del corpo s0 e la sua velocità v.

Ad esempio se all'istante iniziale il corpo si trova a s0 = 20 m dall'origine del sistema di riferimento e mantiene una velocità costante di v = 10 m / s, avremo che dopo un tempo t = 30 s il corpo si troverà a s = 20 m + 10 m / s · 30 s = 320 m dall'origine del sistema di riferimento.

Di seguito riporto il grafico spazio-tempo e il grafico velocità-tempo per il moto rettilineo uniforme:



Per quanto riguardo il grafico spazio-tempo osserviamo come la pendenza della retta fornisca un'informazione relativa alla velocità del corpo in movimento: maggiore è la pendenza della retta, maggiore è la velocità del corpo.

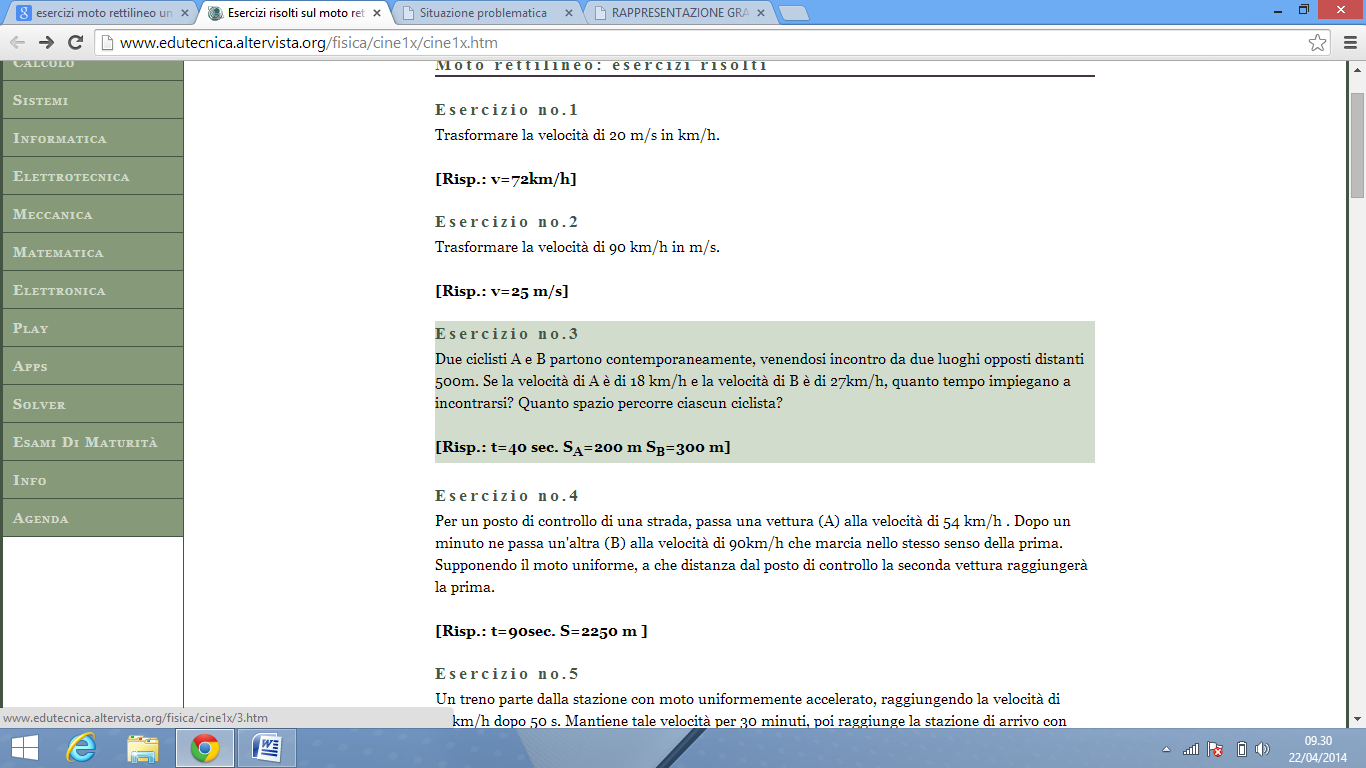
**Molto interessante è anche l'interpretazione geometrica del grafico velocità-tempo: l'area del rettangolo in figura infatti è uguale allo spazio percorso dal corpo in un intervallo di tempo uguale alla lunghezza della base del rettangolo**.

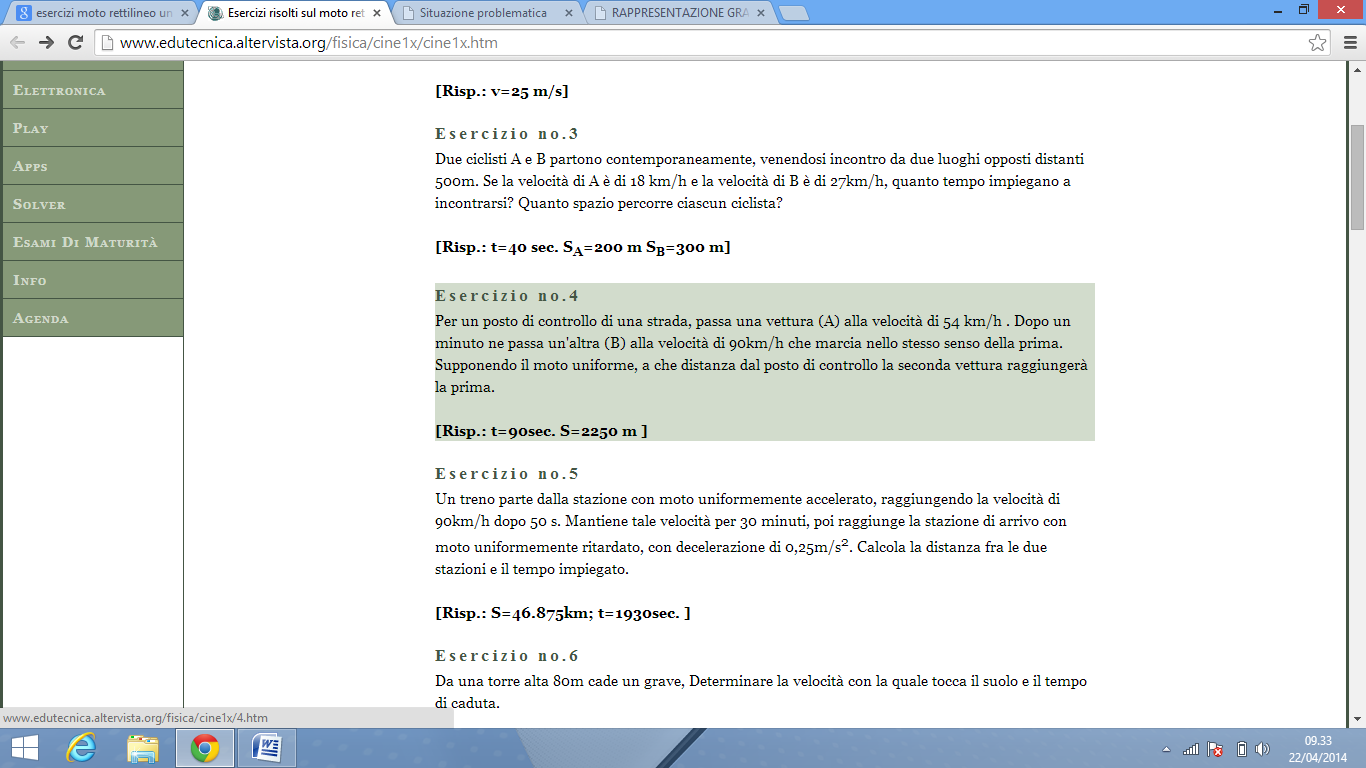
Ad esempio, se un corpo si muove a una velocità costante di v = 2 m / s, in un intervallo di tempo pari a 20 s percorrerà uno spazio pari a s = 2 m / s · 20 s = 40 m numericamente uguale all'area del rettangolo che ha per base l'intervallo di tempo e per altezza la velocità costante.

Questa proprietà del grafico velocità-tempo rimane valida anche per moti diversi dal moto rettilineo uniforme: invece di ottenere una linea parallela all'asse delle ascisse avremo una curva generica ma l'area sottesa al grafico rimarrà numericamente uguale allo spazio percorso dal corpo.

L'unità di misura della velocità nel Sistema Internazionale è il metro al secondo (m / s). Nella vita di tutti i giorni è molto più frequente l'uso del kilometro orario (km / h). Vediamo qual è il fattore di conversione che ci consente di passare da un'unità di misura all'altra. Ricordiamoci che il prefisso kilo sta per 1000, pertanto 1 km = 1000 m. In un'ora invece ci sono 60 minuti e in un minuto ci sono 60 secondi, pertanto 1 h = 60 m = 3600 s. Di conseguenza 1 km / h = 1000 m / 3600 s = 1 / 3.6 m / s.

**Quindi se abbiamo una certa velocità espressa in kilometri orari la dobbiamo dividere per 3.6 per avere la stessa velocità espressa in metri al secondo. Viceversa, se abbiamo una velocità espressa in metri al secondo, la dobbiamo moltiplicare per 3.6 per avere la stessa velocità espressa in kilometri orari, ossia 1 m / s = 3.6 km / h.**

** ORA FAI GIRARE LE TUE ROTELLE**



ESERCIZIO SVOLTO

Gli alunni della VA desiderano assistere al concerto del 1° maggio a Roma e pertanto si preoccupano di assumere le dovute informazioni: orario del concerto, prezzo e modalità di acquisto del biglietto, spesa per il trasporto. Quest’ultima voce presuppone, però, una scelta tra due alternative:

1.   ci si può recare a Roma in treno spendendo £ 3.5000 a persona;

2.   si può noleggiare un pullman pagando una quota fissa di £ 420.000 più    £ 8.750 per ogni persona      trasportata.

Naturalmente la convenienza dell’una o dell’altra soluzione dipenderà dal numero dei partecipanti.

I ragazzi costruiscono un modello matematico che descriva la situazione: indicando con  x  il  numero dei partecipanti e con  y  il costo del trasporto, prospettano le due soluzioni:

A (viaggio in treno)                           y  = 35.000  x

B (viaggio in pulmann)                      y  = 8.750   x  + 420.000

Si tratta ora di rappresentare per punti le due funzioni, creando una tabella per i valori della variabile indipendente   x   e riservando due colonne alla variabile dipendente  y per i due casi. Gli alunni già sanno che i due grafici saranno rappresentati da altrettante rette e, in particolare, la prima sarà proprio un grafico di proporzionalità diretta, essendo la funzione del tipo   ***y = k x → K = y/x***

1. Traccia graficamente dove si trovano le due rette che si intersecano in un punto di ascissa 16.
2. Come puoi determinare algebricamente e graficamente il punto di intersezione?!
3. Perché? Come puoi dimostrare che le rette si intersecano?

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Si può agevolmente dedurre che fino a 16  partecipanti è più conveniente la soluzione A, mentre per un numero maggiore risulta meno dispendiosa la scelta B.

**ORA FAI GIRARE LE TUE ROTELLE**

Nella LEGGE DI CAPITALIZZAZIONE AD INTERESSE SEMPLICE il montante è una cifra che viene sommata al capitale iniziale. Esso dipende ovviamente dal capitale iniziale, dal tempo intercorso fra il prestito e la riconsegna e dal tasso di interesse stabilito.

Quindi possiamo scrivere la formula come:

**C0** CAPITALE INIZIALE

**M** MONTANTE

**i** TASSO DI INTERESSE

**t** TEMPO

**M = C0 + (C0•i•t) raccogliendo a fattor comune M = C(1+it)**

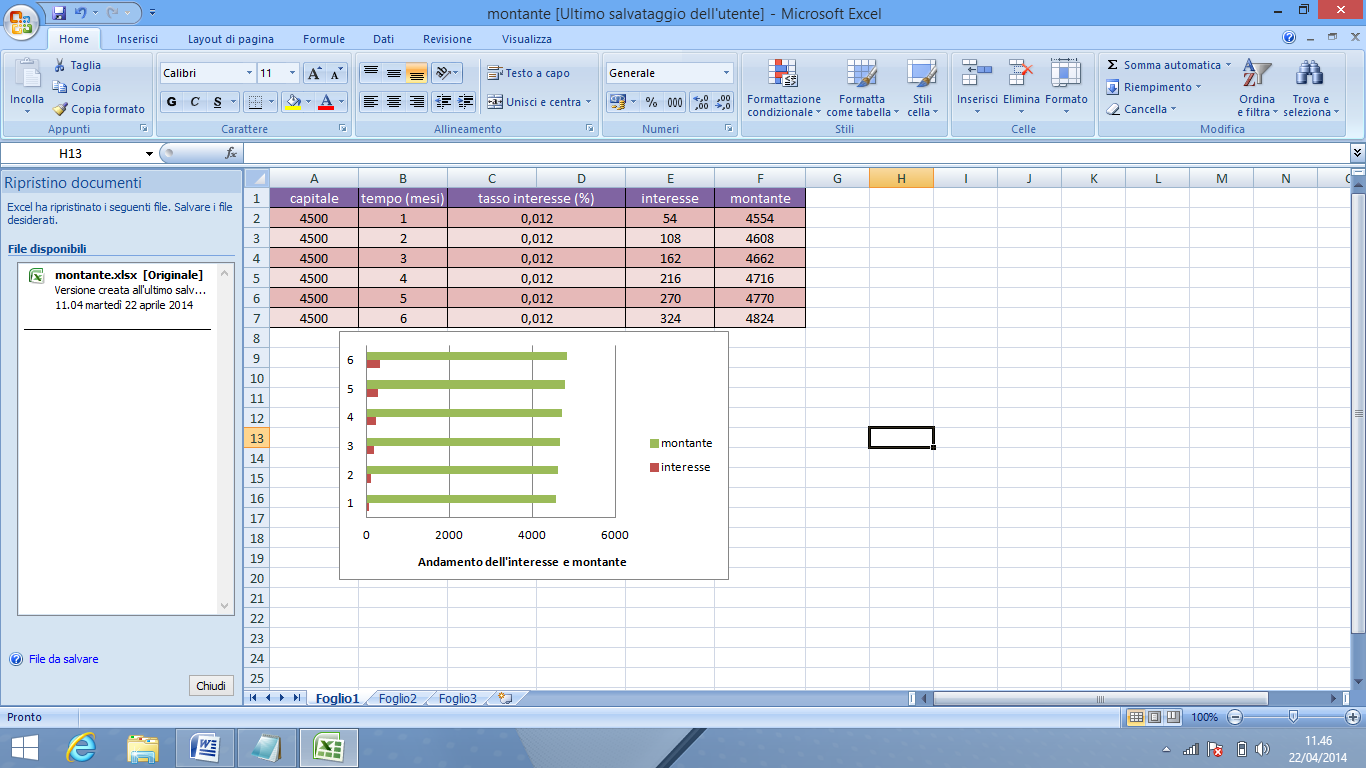
Tale interesse è proporzionale al tempo oltre che al capitale.

**Esso gode della proprietà di essere una funzione lineare del tempo, graficamente** il fattore di montante a interesse semplice **è rappresentato dalla semiretta che giace nel primo quadrante**. Finanziariamente esso caratterizza la velocità di accrescimento del capitale impiegato.

ESERCIZIO

1. Sei in grado di calcolare L’INTERESSE ( I = C0•r•t) ed il MONTANTE semplice di un capitale di 16000 euro, depositato in banca per 2 anni al tasso del 1,2%? Calcola le due funzioni matematiche nei primi 6 mesi dell’anno, utilizzando una tabella e poi il grafico.

Puoi utilizzare anche Excell e creare una tabella con il relativo grafico, come ho fatto io. Sei libero di scegliere lo stile della tabella e del grafico!



1. Se invece non hai utilizzato Excell, ti chiedo quale formula ho inserito nelle celle per calcolare il montante? Tu come l’avresti scritta?

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Forza-peso

## Introduzione al concetto di forza

In questa sezione introduco il concetto di **forza**. Nel linguaggio comune la forza viene associata a spinte o trazioni muscolari. Ad esempio diciamo che è necessario applicare una forza per spostare un armadio da un punto all'altro della stanza.

In fisica si definisce forza la **causa** in grado di produrre sui corpi ai quali viene applicata:

* **Effetti statici**, ossia deformazioni;
* **Effetti dinamici**, ossia variazioni di velocità.

Un tipico esempio di forza è **il peso di un corpo**. Infatti se appoggiamo una pila di libri sopra lo scaffale di una libreria notiamo che la forza-peso dei libri è in grado di produrre una curvatura (deformazione) nello scaffale (**effetto statico**). Viceversa, se lasciamo un libro libero di cadere, esso aumenterà la sua velocità nel moto verticale di caduta verso il basso sempre a causa della forza-peso che in questo caso manifesta i suoi **effetti dinamici** (con un moto rettilineo uniformemente accelerato). Analogamente, quando un calciatore tira un calcio di rigore, il pallone da fermo comincia a mettersi in movimento: in questo caso parliamo di **effetto dinamico della forza**. Quando invece appendiamo un peso a una molla posta in verticale, la molla si deforma allungandosi: in questo caso parliamo di **effetto statico della forza**.

Esistono svariati esempi tratti dalla vita di tutti i giorni nei quali noi applichiamo una forza a un corpo e vediamo che tale corpo rimane fermo. Questo succede, ad esempio, nel tiro alla fune quando due squadre tirano la fune con la stessa intensità ma ai due capi opposti. Come vedremo meglio in seguito, in questo caso le due forze applicate si equivalgono e la fune rimane ferma perché la **forza totale** applicata è uguale a zero. Se invece una delle forze è più intensa allora sulla fune comincia ad essere applicata una forza totale diversa da zero e la fune comincia a muoversi.

Come vedremo meglio nelle prossime lezioni, l'unità di misura della forza nel Sistema Internazionale è il **newton** (N). Un newton è pari all'intensità della forza-peso con la quale una massa di circa 102 g viene attratta verso il centro della Terra.

Uno strumento tarato con il quale possiamo misurare l'intensità di una forza è il **dinamometro**. Il funzionamento di questo strumento curiosamente si basa sugli effetti statici della forza: infatti è costituito da un cilindro graduato contenente una molla. Applicando una forza alla molla, essa si allunga e dall'allungamento è possibile risalire all'intensità della forza.

## Relazione tra massa e forza-peso

Avendo introdotto i concetti di [massa](http://digilander.libero.it/danilo.mauro/temi/massa1.html) e di [forza](http://digilander.libero.it/danilo.mauro/temi/massa.html), stabiliamo una relazione tra la grandezza fisica massa e la grandezza fisica forza-peso. Ogni oggetto posto sulla superficie terrestre è sottoposto a una forza detta **forza-peso** o forza di gravità che lo attira verso il centro della Terra. L'intensità della forza-peso FP di un oggetto avente massa m è data da FP = m · g, dove g è una costante che sulla superficie terrestre è pari a 9.80 N / kg. In altre parole se un corpo ha una massa pari a 1 kg, la sua forza-peso sulla superficie terrestre vale 9.80 N.

Anche se nel linguaggio comune si usano spesso i kilogrammi per indicare il peso di una persona, in fisica i concetti di massa e di forza-peso sono profondamente distinti.

La massa è una **grandezza fondamentale**, al pari della lunghezza e del tempo, mentre invece il peso è una **grandezza derivata**. Nel Sistema Internazionale la massa si misura in kilogrammi, il peso in Newton.

È lecito invece utilizzare il kilogrammo-peso (kgp) come unità di misura di peso alternativa al newton. 1 kgp è la forza-peso di un corpo avente massa 1 kg. Di conseguenza avremo che 1 kgp = 9.8 N o, equivalentemente, 1 N = 0.102 kgp.

La massa di un corpo è una proprietà invariante, dipende solo dalla quantità di materia di un corpo ed è pertanto la stessa sulla Terra, sulla Luna, al livello del mare e sulla punta dell'Everest. La forza-peso invece può cambiare perché, come vedremo, il valore di g varia a seconda del pianeta che prendiamo in considerazione e al variare dell'altezza sul livello del mare. Ad esempio, se al livello del mare abbiamo un'accelerazione g = 9.80 N / kg, a un'altezza di 10.000 metri l'accelerazione di gravità scende a g = 9.77 N / kg. Ad ogni modo, d'ora in poi arrotonderemo sempre l'accelerazione di gravità sulla Terra a 2 [cifre significative](http://digilander.libero.it/danilo.mauro/temi/misure3.html) e scriveremo g = 9.8 N / kg.

Per concludere voglio chiarire che, pur di rimanere in un determinato luogo (ad esempio sulla superficie della Terra), il valore dell'accelerazione di gravità g = FP / m rimane costante. Pertanto possiamo concludere che la forza-peso FP e la massa m di un corpo in un determinato luogo sono [direttamente proporzionali](http://digilander.libero.it/danilo.mauro/temi/propdiretta2.html): questo implica che se raddoppiamo (o triplichiamo) la massa di un corpo allora anche il suo peso raddoppia (triplica).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

## APPENDICE di APPROFONDIMENTO

## 1° e 2° PRINCIPIO DELLA DINAMICA O GALILEIANI

Nella precedente sezione abbiamo visto che, se nessuna forza agisce su un corpo, tale corpo mantiene invariata la sua velocità. Cosa succede invece quando applichiamo una [forza](http://digilander.libero.it/danilo.mauro/temi/massa.html) costante ad un corpo? Una **forza costante** F produce un'**accelerazione costante** a. In particolare, forza ed accelerazione sono [direttamente proporzionali](http://digilander.libero.it/danilo.mauro/temi/propdiretta.html) e la costante di proporzionalità coincide con la massa m del corpo. Possiamo pertanto scrivere la seguente relazione

F = m · a.

Non dobbiamo però dimenticarci che sia la forza che l'accelerazione sono due [grandezze vettoriali](http://digilander.libero.it/danilo.mauro/temi/vettori.html). Il secondo principio della dinamica ci dice che la forza e l'accelerazione hanno la stessa direzione e lo stesso verso. In termini vettoriali possiamo perciò scrivere il **secondo principio della dinamica** come:

F = m · a

La grandezza fisica m è detta **massa inerziale** ed è una misura dell'inerzia del corpo. Il secondo principio della dinamica è una legge di portata generale che include il primo principio della dinamica come caso particolare. Infatti se sul corpo non agisce alcuna forza abbiamo che F = 0. Il secondo principio della dinamica ci dice che anche il prodotto m · a deve essere uguale a zero.

**Quando il prodotto di due numeri è uguale a zero vuol dire che uno dei due fattori è uguale a zero. Siccome la massa m del corpo è un numero finito diverso da zero, possiamo concludere che deve essere a = 0, ossia si deve annullare l'accelerazione del corpo. Pertanto se la forza totale che agisce su un corpo è uguale a zero, il corpo continua a mantenere la sua velocità iniziale, che è esattamente il contenuto del primo principio della dinamica.**

Abbiamo più volte detto che l'unità di misura della forza nel Sistema Internazionale è il newton. Il secondo principio della dinamica ci consente di legare il newton alle altre unità di misura del Sistema Internazionale. Infatti, in base al secondo principio della dinamica, abbiamo che F = m · a, da cui, ricordando che l'unità di misura della massa è il kilogrammo e dell'accelerazione il metro al secondo quadro (m / s2), avremo che 1 N = 1 kg · 1 m / s2. Da questa relazione ricaviamo che una forza di 1 N è quella forza che, applicata su un corpo di massa 1 kg, produce un'accelerazione di 1 m / s2.

Esercizi FAI GIRARE LE TUE ROTELLE

Quesito: Qual è la forza-peso di un corpo di massa m = 40 g sulla superficie terrestre?

Risposta: Sappiamo che sulla superficie terrestre g = 9.8 N / kg. Per ottenere la risposta al quesito dobbiamo convertire la massa in kilogrammi: m = 40 g = 0.04 kg, da cui il peso dell'oggetto è FP = m · g = 0.04 kg · 9.8 N / kg = 0.39 N.

Quesito: Supponiamo che in un certo posto un corpo di massa m = 3 kg eserciti una forza-peso FP = 4.9 N. Quanto vale la costante g in quel posto?

Risposta: Si tratta di invertire la formula FP = m · g per ricavare g. In questo caso dobbiamo dividere a destra e a sinistra per la massa m, per ottenere g = FP / m. Sostituendo nella formula i valori numerici otteniamo g = 4.9 N / 3 kg = 1.6 N / Kg. Un valore simile per la costante g si ha sulla Luna dove, di conseguenza, i corpi pesano circa 1/6 di quello che pesano sulla superficie terrestre.

Quesito: Se un corpo pesa 80 N sulla superficie terrestre, qual è il suo peso su un pianeta in cui la costante g = 2.5 N / kg?

Risposta: Per prima cosa è necessario ricavarsi la massa m dal peso FP, usando la formula diretta m = FP / g. Ricordandoci che sulla Terra g = 9.8 N / kg e sostituendo i valori numerici abbiamo m = 80 / 9.8 kg = 8.2 kg. La massa del corpo è la stessa sia sulla superficie della Terra che sulla superficie del pianeta. Quello che è diverso invece è il peso. Infatti sul pianeta avremo: FP = m · g = 8.2 kg · 2.5 N / kg = 20.5 N.

Forza Elastica

Quando due grandezze fisiche sono tali per cui i punti associati alle loro misure giacciono su una retta passante per l'origine, diciamo che queste due grandezze fisiche sono direttamente proporzionali. Nel caso del nostro esempio, l'allungamento di una molla x e la forza applicata F sono due grandezze direttamente proporzionali: F = k · x. Il contenuto di questa relazione matematica esistente tra la forza e l'allungamento va anche sotto il nome di legge di Hooke.

La costante di proporzionalità k prende il nome di costante elastica della molla. Dividendo per l'allungamento x entrambi i membri dell'uguaglianza F = k · x otteniamo che k = F / x da cui l'unità di misura di k nel Sistema Internazionale è il newton su metro (N / m). Da questa relazione possiamo anche derivare una caratterizzazione interessante delle grandezze direttamente proporzionali:

Due grandezze sono direttamente proporzionali quando il loro rapporto risulta essere uguale a una costante.

In altre parole, cambiando la forza applicata alla molla cambia l'allungamento ma siamo certi che, se dividiamo la forza per l'allungamento, otteniamo un numero fisso che dipende solo dalle caratteristiche costitutive della molla.

Di conseguenza se raddoppiamo la forza applicata raddoppierà anche l'allungamento prodotto, se triplichiamo la forza applicata triplicherà anche l'allungamento e così via. Queste considerazioni sono valide fino a un certo valore massimo della forza applicata alla molla. Ogni molla infatti può sopportare un carico massimo. Quando aumentiamo ulteriormente il carico verranno indotte delle deformazioni permanenti nella molla che perderà di conseguenza le sue caratteristiche elastiche.

**In questo regime la forza e l'allungamento non sono più direttamente proporzionali.**

Per ricavare l'allungamento x in funzione della forza F e della costante k dovremo dividere entrambi i membri della **legge di Hooke F = k · x per k. In questo modo x = F / k.**

Siccome k compare al denominatore avremo che, a parità di forza applicata, una molla caratterizzata da una costante elastica k molto alta (molla rigida) si allungherà di poco, una molla caratterizzata da una costante elastica k molto piccola si allungherà di molto (molla elastica).

Ad esempio, se fissiamo come forza applicata alla molla F = 0.5 N, avremo che a una costante elastica k = 60 N / m corrisponde un allungamento:

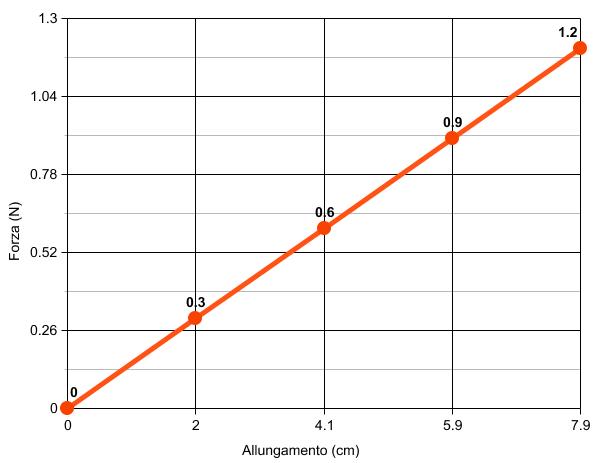
**x = 0.5 / 60 m = 8 · 10-3 m = 0.008 m**

Se invece la costante elastica diventa un decimo della precedente, ossia k = 6 N / m, avremo un allungamento dieci volte maggiore: x = 0.5 / 6 m = 0.08 m.

Concludo questa sezione con alcune considerazioni sulla misura indiretta di k.

Siccome k = F / x, per misurare k possiamo fare varie misure della forza F e dell'allungamento prodotto x.

La migliore stima per la costante di elasticità della molla è il [valor medio](http://digilander.libero.it/danilo.mauro/temi/misure1.html) delle misure, l'errore assoluto associato è invece la [semidispersione](http://digilander.libero.it/danilo.mauro/temi/misure2.html) delle misure.



ESERCIZIO SVOLTO

 **Quesito**: Supponiamo di appendere un peso di 8 N a una molla provocandone un allungamento pari a 6 cm. Di quanto si allunga la stessa molla se vi appendiamo un peso di 16 N? E se vi appendiamo un peso di 24 N? E se vi appendiamo una massa di 300 g?

**Risposta**: Il peso applicato alla molla e l'allungamento della molla sono direttamente proporzionali. Pertanto se il peso raddoppia passando da 8 N a 16 N, raddoppia anche l'allungamento passando da 6 cm a 12 cm. Se il peso triplica, passando da 8 N a 24 N, anche l'allungamento triplicherà, passando da 6 cm a 18 cm.

Dai precedenti dati possiamo anche ricavarci la costante elastica della molla:

k = F / x = 8 N / 6 cm = 8 N / 0.06 m = 133 N / m.

Per rispondere all'ultima domanda dobbiamo ricordare che la forza-peso di un corpo è uguale alla massa moltiplicata per 9.8 N / kg,

ossia

F = 0.3 kg · 9.8 N / kg = 2.94 N

Nota bene: siccome la costante elastica della molla è espressa in N / kg, è fondamentale convertire la massa da kilogrammi a grammi, prima di inserire il suo valore numerico nella formula della forza-peso.

L'allungamento x provocato da una forza F = 2.94 N si ricava dalla formula:

x = F / k:

x = F / k = 2.94 / 133 m = 0.022 m = 2.2 cm.

Un altro modo per rispondere all'ultima domanda, prescindendo dalla conoscenza del valore della costante elastica, è quello di impostare una proporzione. Siccome la forza e l'allungamento sono direttamente proporzionali, possiamo scrivere la proporzione 8 N : 6 cm = 2.94 N : x cm, dove l'unica incognita è rappresentata dall'allungamento x. Siccome in una proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi avremo che 8 · x = 6 · 2.94 da cui l'allungamento provocato da una forza F = 2.94 N risulta x = 6 · 2.94 / 8 = 2.2 cm.

 **Quesito**: Qual è la costante elastica di una molla che si allunga di 34 mm quando le viene applicata una massa di 1.5 kg?

**Risposta**: La forza applicata alla molla è F = 1.5 · 9.8 = 14.7 N. Se vogliamo ottenere la costante elastica nelle unità del Sistema Internazionale dobbiamo convertire i millimetri in metri: x = 34 mm = 0.034 m, da

cui la costante elastica della molla è:

k = F / x = 14.7 N / 0.034 m = 432 N / m.

Abbiamo già visto che una delle regole fondamentali della geometria analitica afferma che i punti sono descritti da coppie ordinate di numeri P = (xP, yP) mentre le rette sono descritte da equazioni matematiche. In questa sezione vogliamo analizzare un po' meglio il modo in cui la geometria analitica descrive le rette per mezzo di equazioni matematiche.

Per prima cosa ricordiamo che le rette passanti per l'origine sono descritte da equazioni matematiche del tipo y = a · x. Nel nostro esempio y è la forza F applicata alla molla, x è l'allungamento della molla, mentre a coincide con la costante elastica della molla (che è un numero fissato una volta che abbiamo scelto la molla). La potenza della geometria analitica risiede proprio in questo: ogni retta passante per l'origine è associata a un'equazione del tipo:

**y = a · x**

**viceversa, ad ogni equazione del tipo y = a · x corrisponde una particolare retta passante per l'origine.**

**La costante a è un numero che prende il nome di coefficiente angolare della retta.**

Tale numero caratterizza la pendenza della retta: rette con grandi valori di a tendono ad essere allineate con l'asse verticale, rette con piccoli valori di a tendono invece ad essere allineate con l'asse orizzontale. Due rette sono parallele quando hanno la stessa pendenza, ossia quando hanno lo stesso coefficiente angolare.

Ricordo che un punto sta su una retta se le sue coordinate (Px, Py) soddisfano l'equazione della retta, cioè per la x che tu arbitrariamente decidi il valore, ottieni una y, per cui il punto appartiene (giace) sulla retta.

È chiaro che se voglio descrivere analiticamente una retta non passante per l'origine, devo usare un'equazione diversa rispetto **y = a · x**

In quest'equazione infatti all'ascissa x = 0 corrisponde sempre l'ordinata y = a · 0 = 0, pertanto la retta y = a · x non può non passare per l'origine (0, 0). Se vogliamo descrivere anche le rette che non passano per l'origine dobbiamo introdurre un secondo parametro b e considerare equazioni del **tipo y = a · x + b**

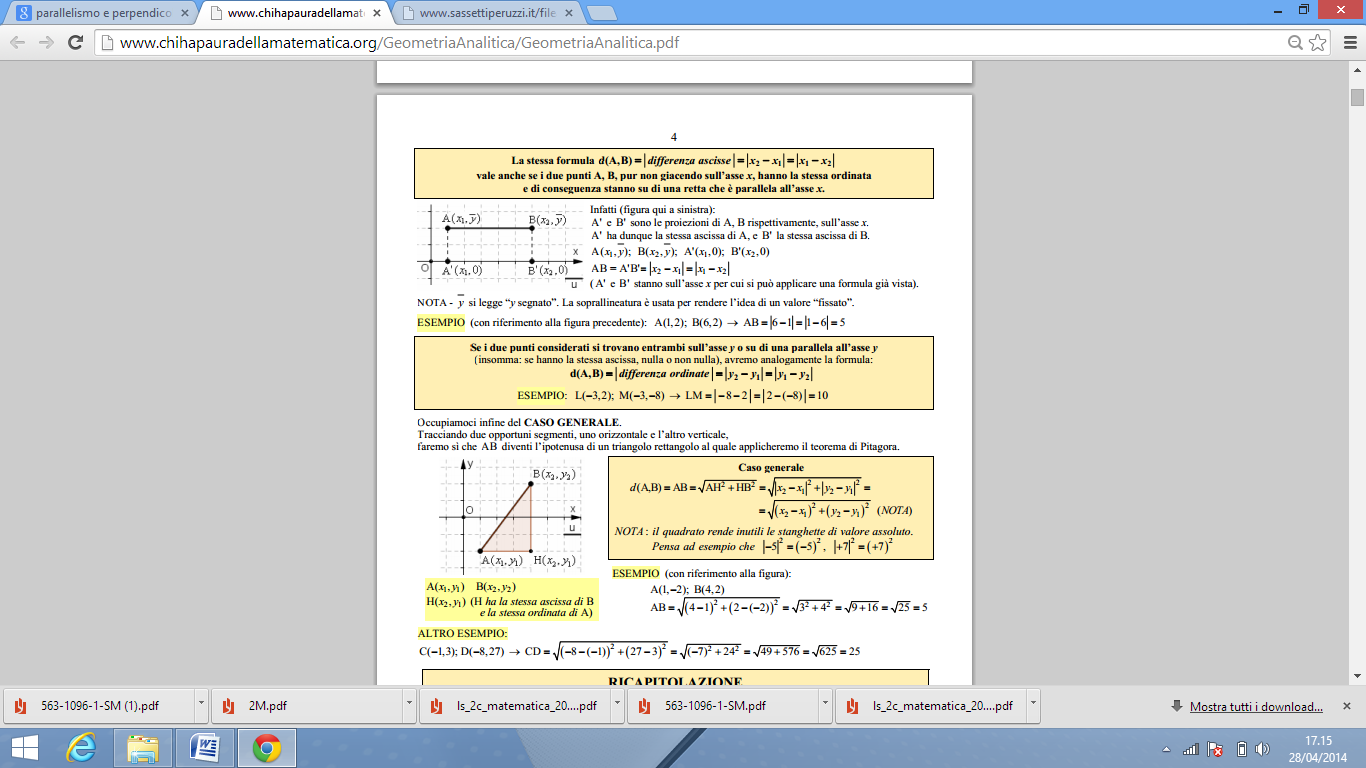
In questo caso all'ascissa x = 0 corrisponde l'ordinata y = b e quindi la retta può intersecare l'asse delle ordinate ad una qualunque altezza b. Si può dimostrare che ogni retta del piano cartesiano (non parallela all'asse y) si può scrivere nella forma y = a · x + b e, viceversa, ad ogni equazione del tipo y = a · x + b corrisponde una particolare retta del piano.

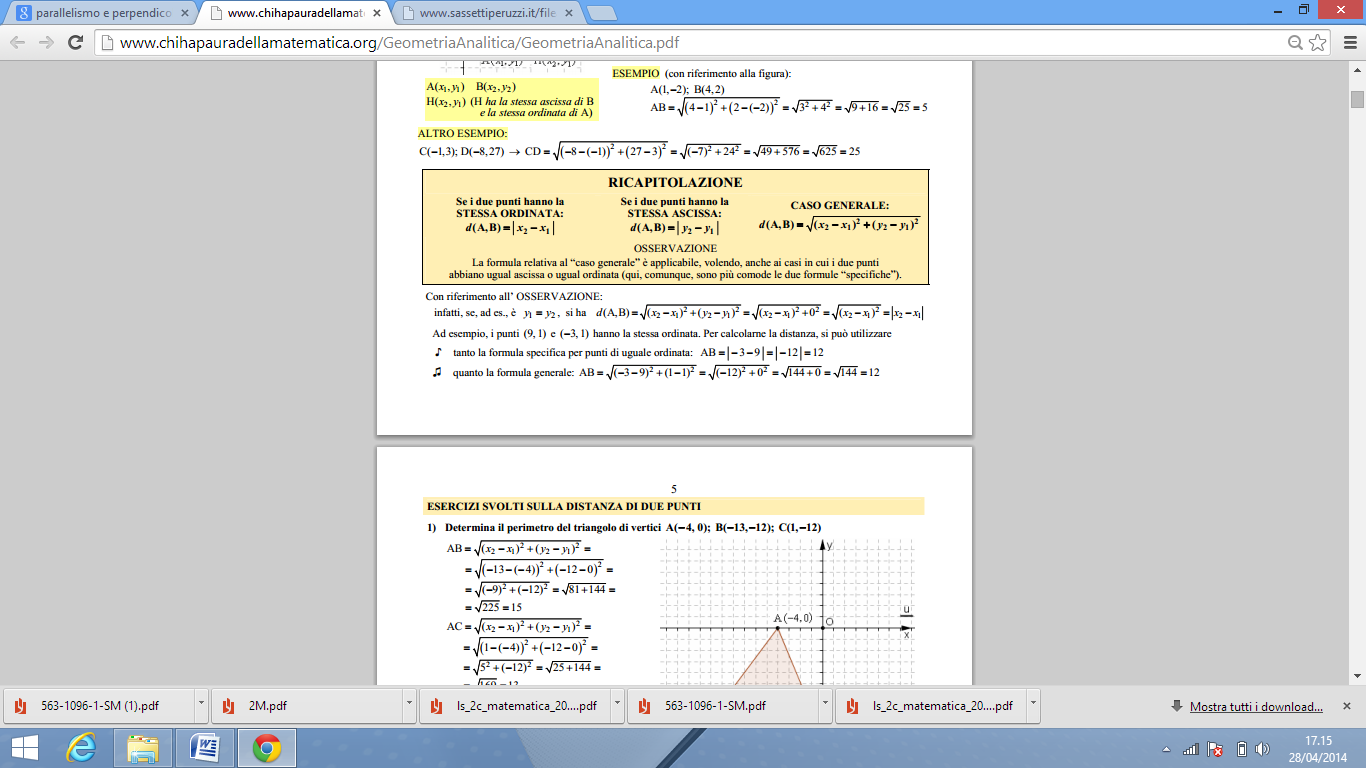
Come casi particolari, se b = 0 riotteniamo le rette y = a · x, passanti per l'origine.

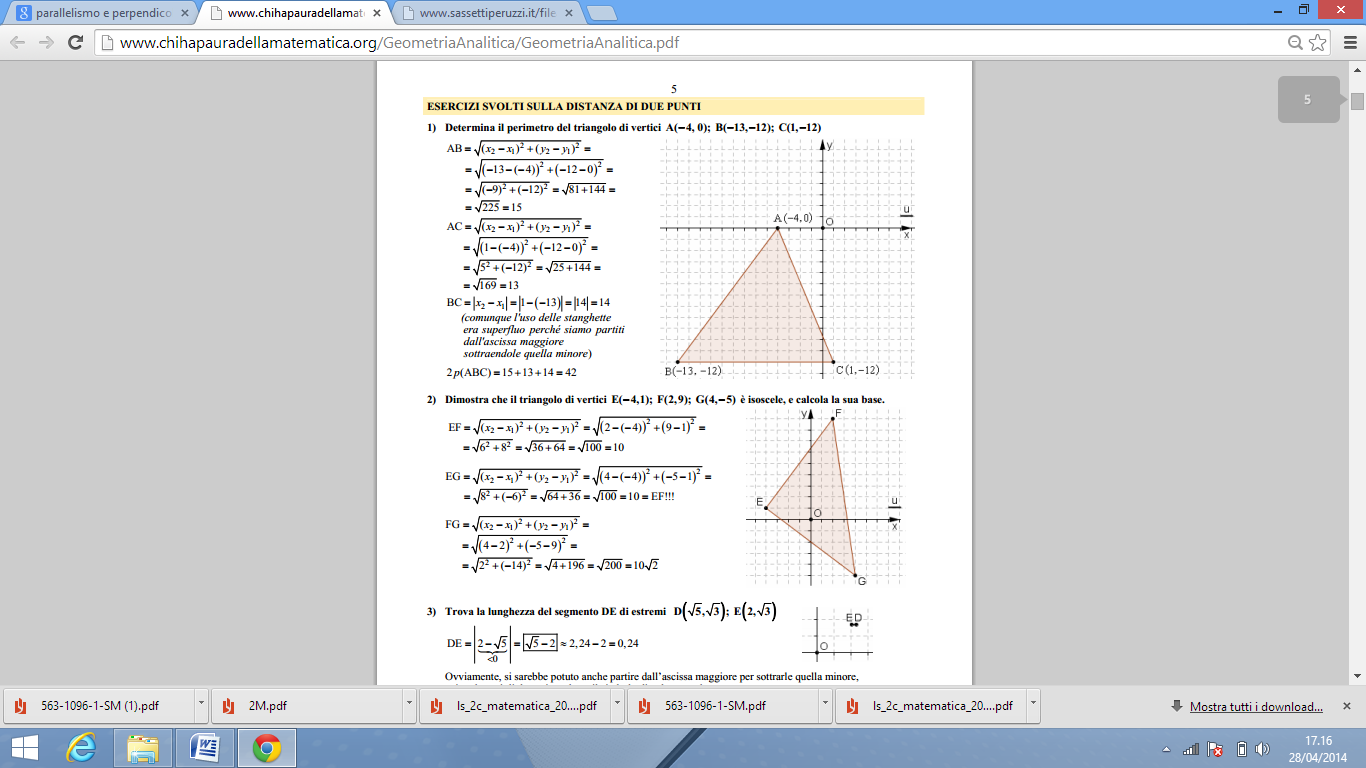
Se a = 0 otteniamo che y = b, ossia l'insieme dei punti che hanno ugual ordinata. È facile rendersi conto che l'insieme di tali punti è una retta parallela all'asse delle ascisse.

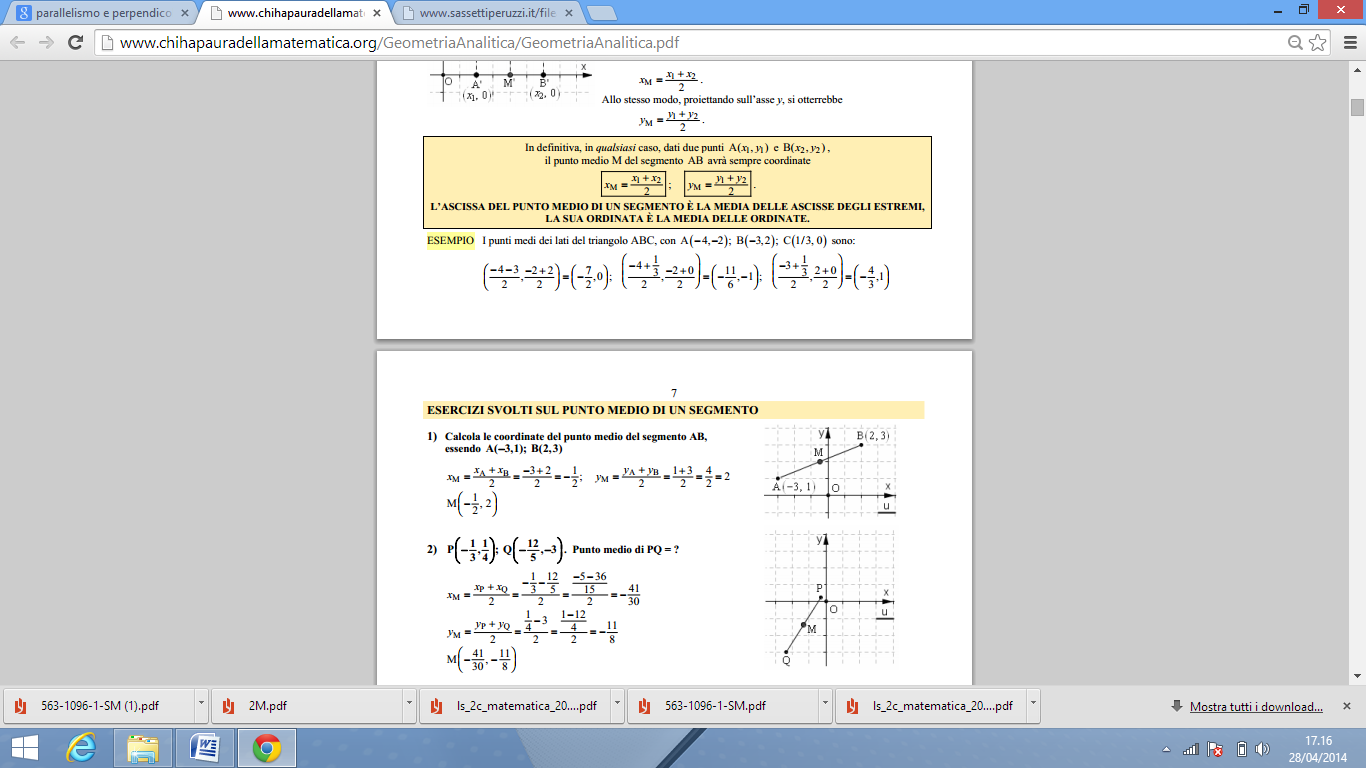
Viceversa le rette parallele all'asse delle ordinate sono descritte da rette del tipo x = b, ossia una retta parallela all'asse delle ordinate è caratterizzata dall'avere le ascisse uguali ad una costante.

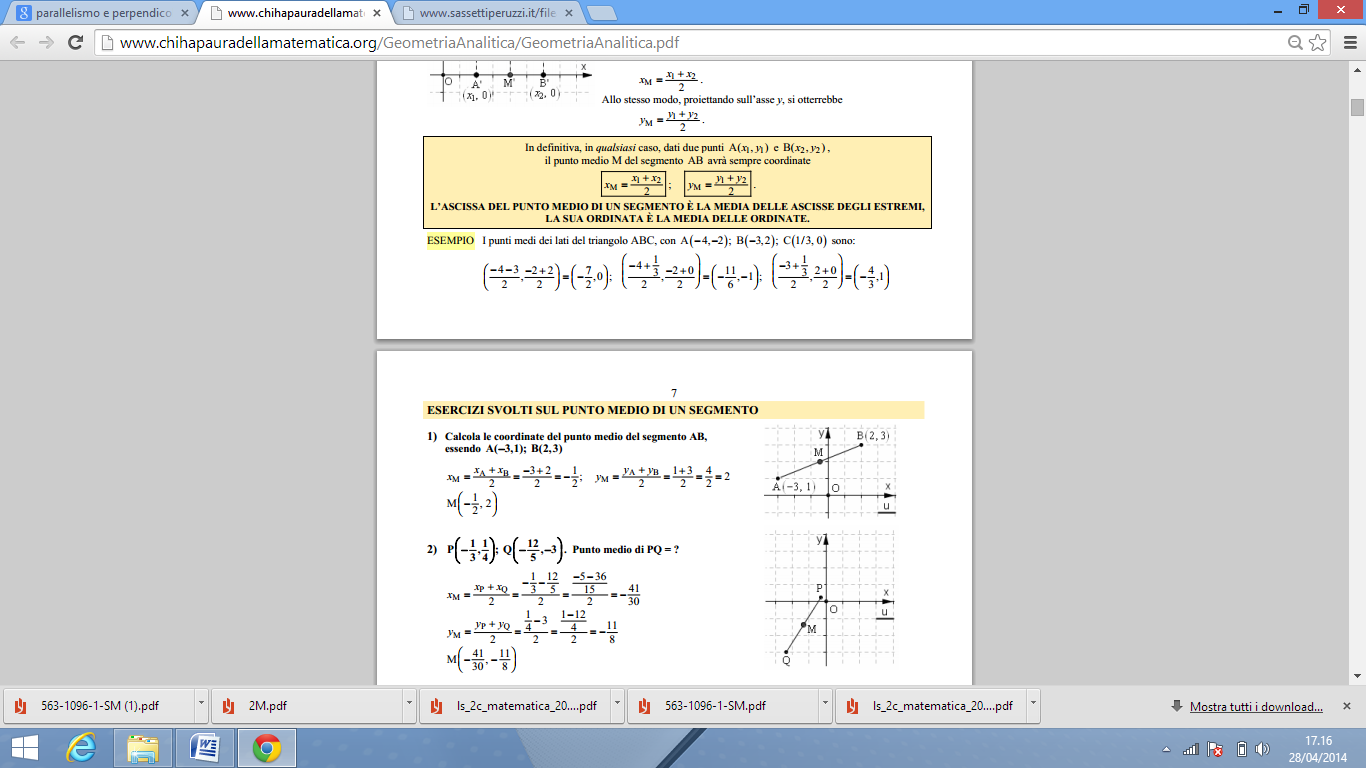
\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

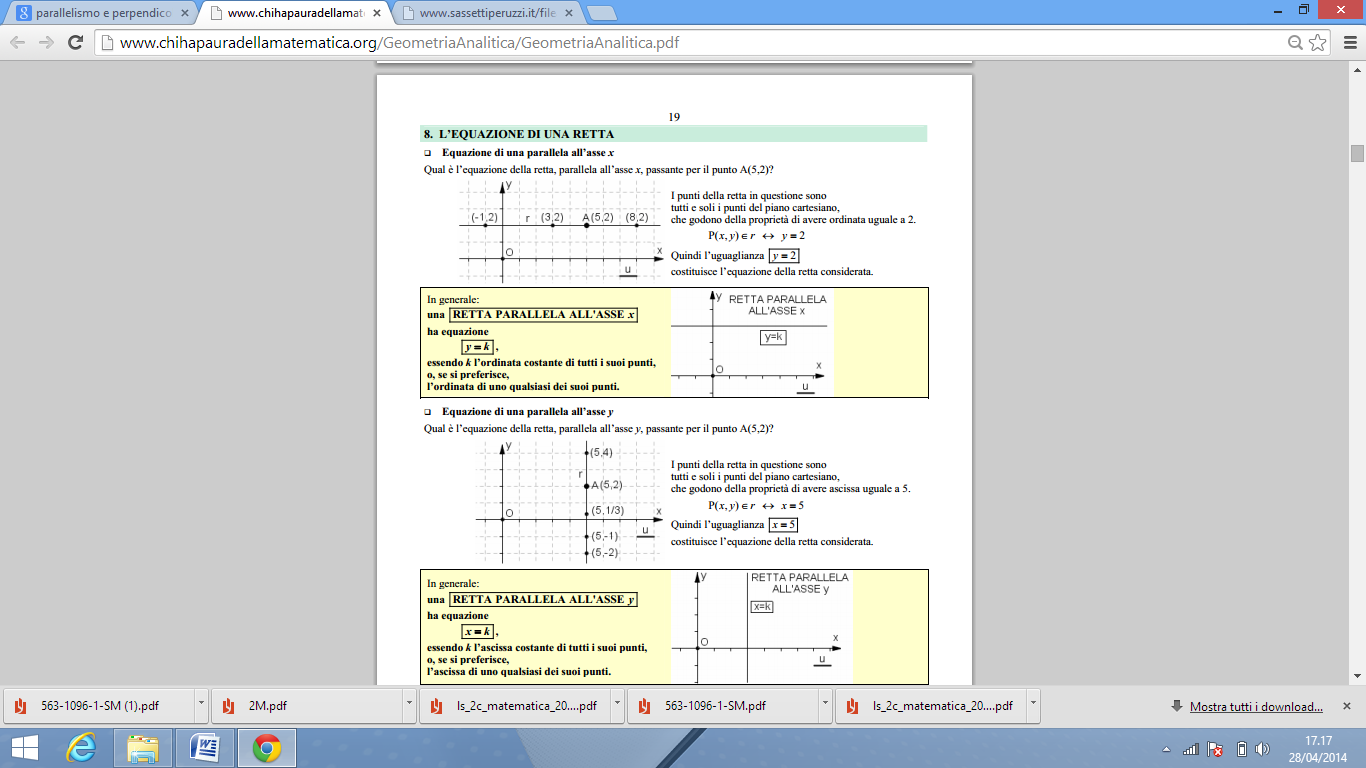
GEOMETRIA ANALITICA

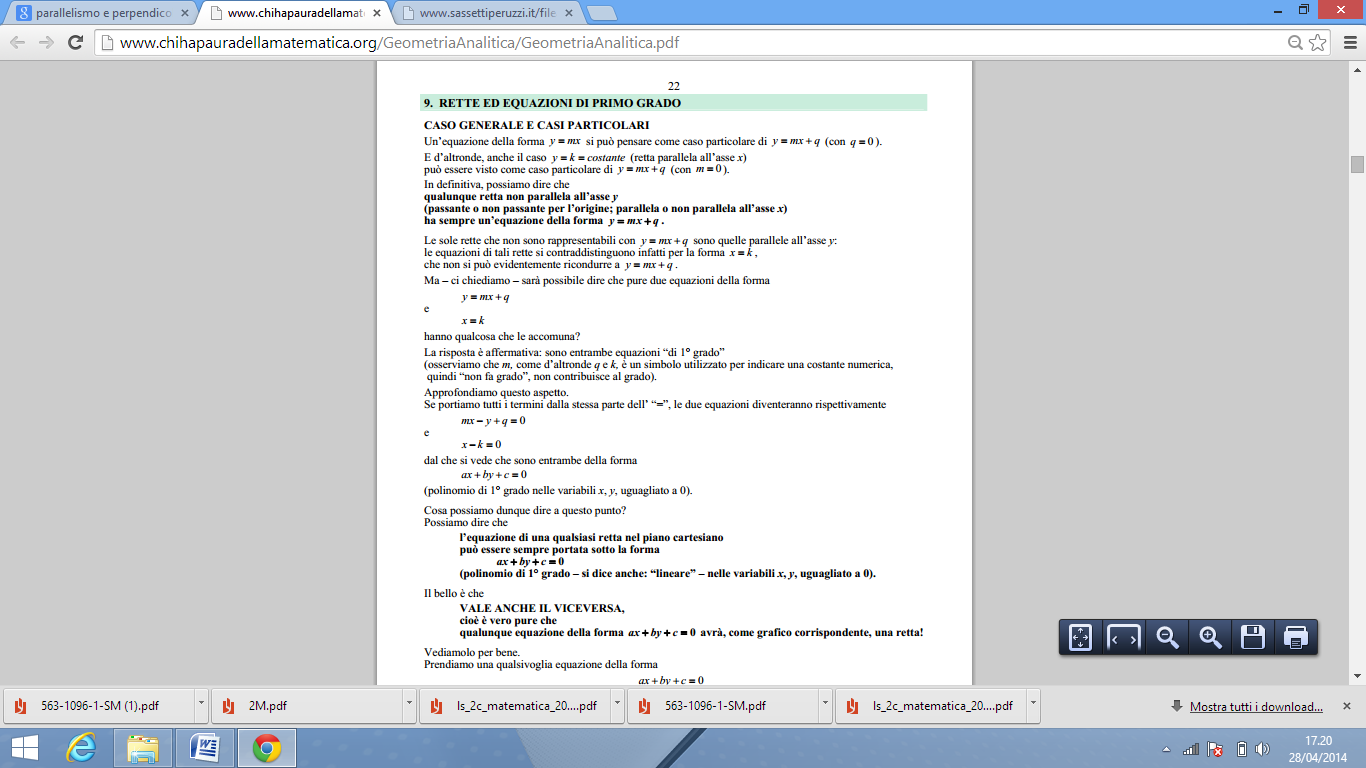


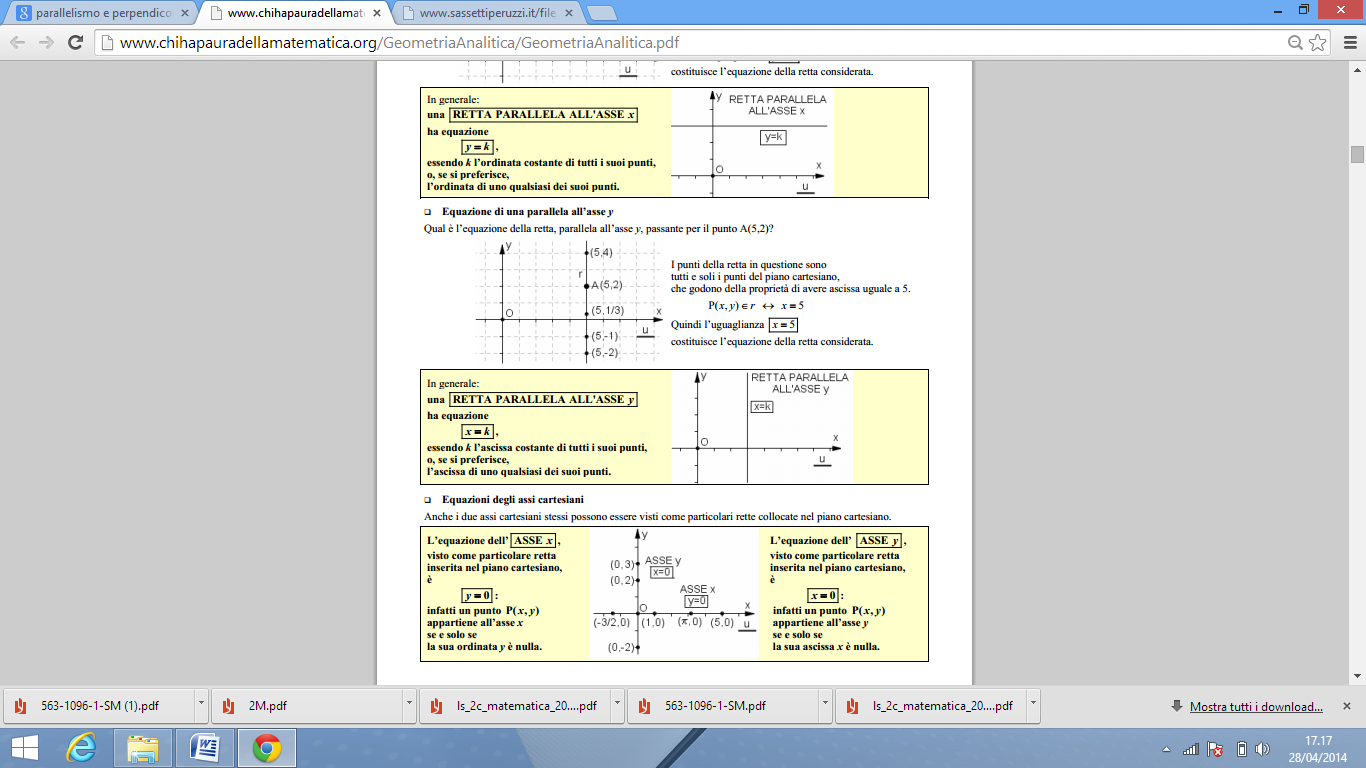




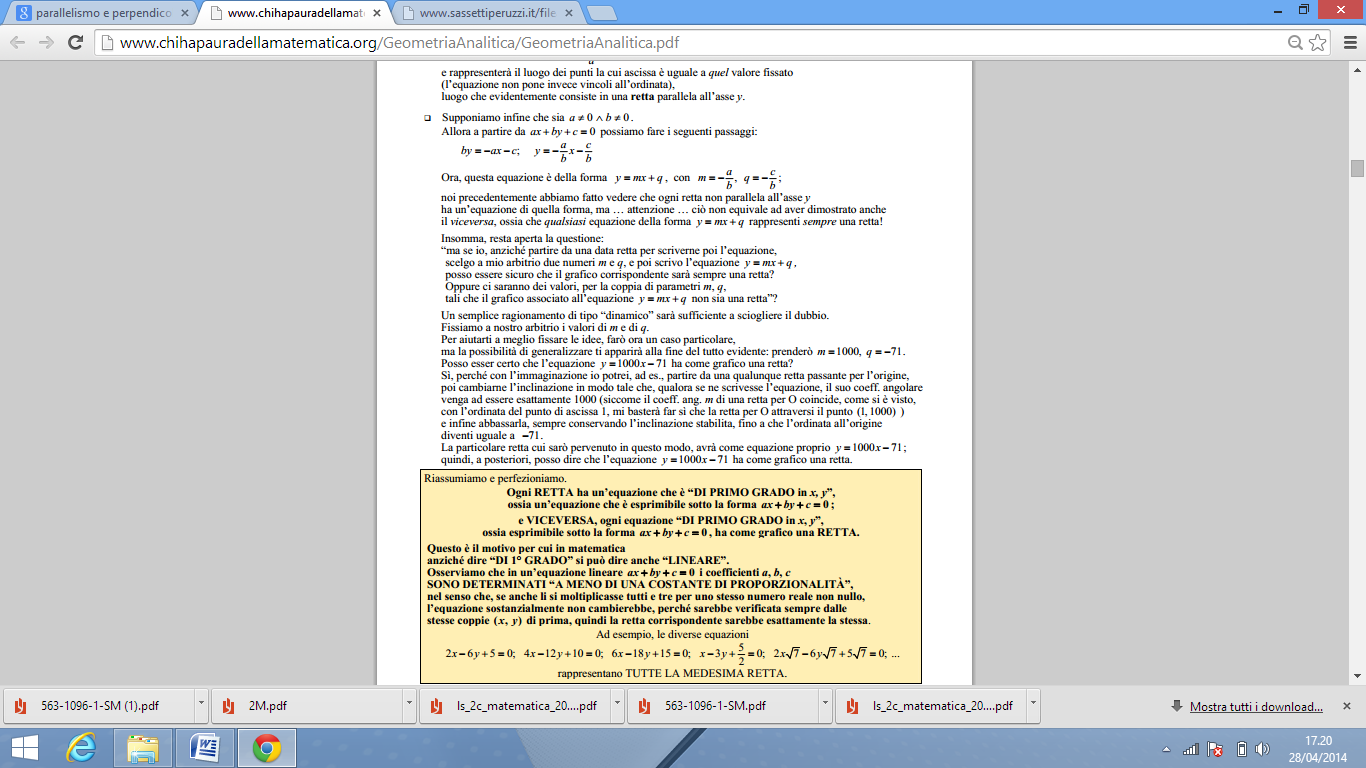


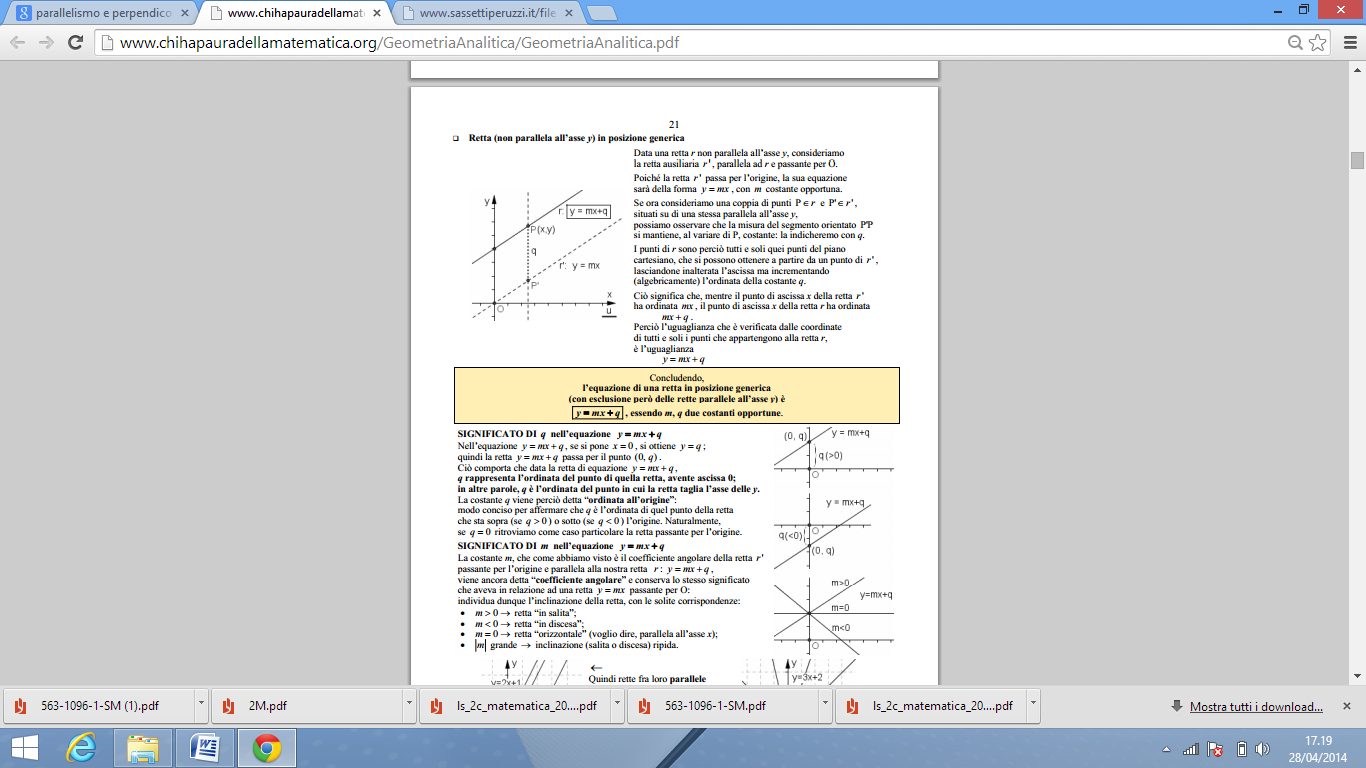


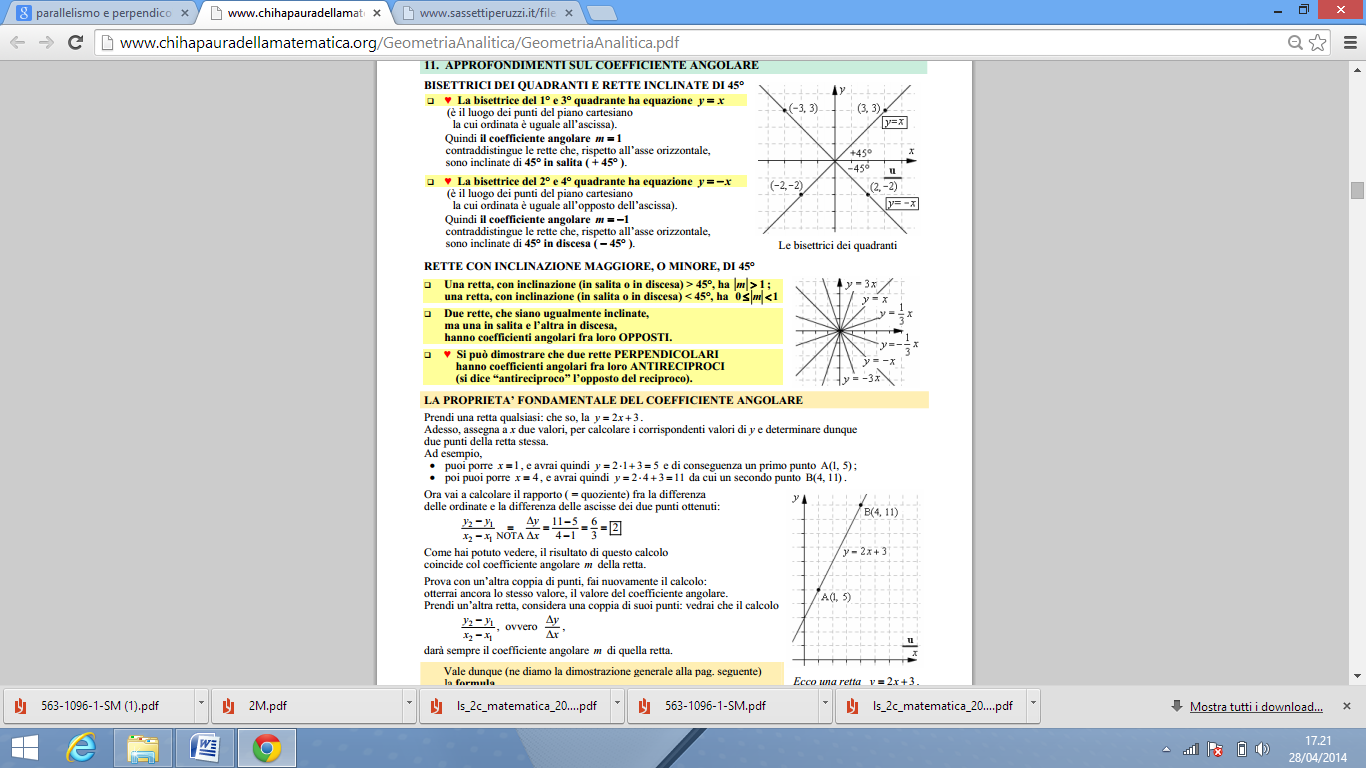












[ESERCIZI GUIDATI A DIFFICOLTA’ CRESCENTE](http://libreriaweb.edatlas.it/media/store/secure/3_Le_rette_nel_piano.pdf) (clicca sulla scritta)