Definizioni o Assegnazioni di Probabilità ?

LE STATISTICHE SOSTENGONO CHE PIÙ TEMPO SI PASSA IN AUTOMOBILE SULLE STRADE E PIÙ AUMENTA LA PROBABILITÀ DI INCIDENTI; LA PRUDENZA CONSIGLIA QUINDI DI POSSEDERE UN'AUTO MOLTO VELOCE E DI CORRERE A TAVOLETTA ! !

La "freddura" che abbiamo qui sopra citata vuol essere indicativa del percorso che stiamo per intraprendere.

Nella vita di ogni giorno ci si arrovella senza sosta chiedendoci quale decisione prendere in situazioni di incertezza o se esistono criteri che ci mettano al riparo dai rischi delle nostre scelte:

- prendo la macchina o l'autobus ?
- scelgo un mutuo a tasso fisso o uno a tasso variabile ?
- mi reco subito nella clinica privata o seguo la lista d'attesa dell'ospedale ?
- è meglio dare prima l'esame di Statistica o quello d'Algebra ?
- $\cdots$

Una delle "guide" più coltivate nelle situazioni di incertezza è l'uso del ragionamento induttivo ([1]) e la probabilità è lo strumento essenziale della logica induttiva.

Ma cosa si intende per probabilità?

Come si passa cioè da una mera "sensazione" (*poco probabile, altamente probabile,* $\cdots$) ad un *numero* che rappresenti tale sensazione ? E siamo poi certi della correttezza della procedura adottata (in modo da non incappare in "conclusioni" tipo quelle della citazione) ?

Iniziamo allora, da matematici, a dare la **definizione**:

La Probabilità è **il grado di fiducia** oppure **la misura delle aspettative** nel verificarsi di un evento. (Definizione soggettiva).

Questa definizione è l'unica che, dopo vari decenni di dispute accanite, sta avendo un consenso convinto.

La definizione soggettiva è ormai largamente riconosciuta come la più rispondente ai fondamenti ed alle necessità del calcolo delel Probabilità, oltre che essere uno dei più importanti risultati matematici del secolo scorso: essa è dovuta al genio di Bruno de Finetti (1906 – 1985), illustre scienziato italiano che negli anni '30 ne gettò le basi.

[1] Il ragionamento induttivo è il tipo di ragionamento che costruisce una situazione dinamica: ad es., si pensa ad una situazione con un numero imprecisato di elementi e ci si chiede: cosa succede se ne arriva un altro? è quindi una *inferenza* che amplia la conoscenza dell'insieme in senso probabilistico. Gli interessati alla filosofia dell'induzione possono trarre giovamento dalle riflessioni di David Hume (1711 - 1776) e poi di John Stuart Mill (1806 – 1873).

Dopo aver detto questo è necessario sottolineare il fatto che essa presenta aspetti di difficoltà culturale che *ne sconsigliano*, almeno per le fasce scolastiche della scuola primaria e della scuola secondaria di primo grado, una trattazione da parte dell'insegnante, sia nei libri di testo sia in classe.

Di tutto ciò ci occuperemo nel seguito facendo considerazioni di carattere storico, epistemologico e carattere pedagogico - didattico.

*

* *

Fin da quando gli strumenti del Calcolo delle Probabilità sono emersi, con forza prorompente, nelle necessità delle applicazioni fisiche, economiche e della vita di tutti giorni, si è aperto il dibattito, fortemente sentito dagli scienziati (e dai matematici in particolare) sui fondamenti concettuali della disciplina. Ciò è accaduto, come è noto, dalla metà del diciassettesimo secolo. ([2])

Storicamente la teoria delle probabilità si è sviluppata secondo varie e diverse impostazioni: *classica, frequentista, logica,* $\cdots$, *soggettiva, assiomatica.*

Iniziamo a parlare di quest'ultima: essa è sorta proprio per l'esigenza dei matematici (di ogni epoca) di avere a disposizione una "struttura" di postulati che permettesse di sistemare in modo rigoroso le conoscenze e le molte applicazioni della disciplina (così come era accaduto per gli *assiomi di Euclide* per la Geometria, gli *assiomi di Peano* per i Numeri naturali, $\cdots$). Dai tempi di Laplace dunque i matematici hanno cercato di sviluppare un'impostazione assiomatica; quella che ci accingiamo ad illustrare risale ad A. N. Kolmogorov ([3]). Iniziamo da questa soprattutto perchè le proprietà da essa evidenziate sono state una linea guida costante per gli antesignani della discipina; esse saranno poi soddisfatte da tutte le altre definizioni (o impostazioni).

Si deve calcolare la probabilità di un *evento*.

La nozione di evento è assunta in senso *primitivo*, ovvero come il modo in cui si manifesta un fenomeno o uno dei possibili esiti di un esperimento. L'insieme di tutti gli *eventi*, ovvero l'insieme di tutti i possibili risultati di un esperimento, costituisce quello che viene usualmente chiamato **spazio dei campioni** (indicato con Ω).

Dato allora lo spazio Ω, con sopra una struttura $\mathcal{F}$ di algebra (o di σ algebra), si dice che $\mathbb{P}$, una funzione, definita sull'algebra ([4]) $\mathcal{F}$ degli eventi, a valori reali,

[2] Generalmente si fa risalire al 1654 la "data d'inizio" del Calcolo delle Probabilità, allorchè una disputa tra giocatori d'azzardo portò due famosi matematici francesi, Blaise Pascal e Pierre de Fermat, ad uno scambio epistolare dal quale si poteva evincere una pionieristica (e parziale) formulazione di una teoria matematica della probabilità. Una prima sistemazione della materia si fa poi risalire a Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827) che introdusse una grande quantità di nuove idee e tecniche matematiche nel suo libro Théorie Analytique des Probabilités.

[3] Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1933

[4] si parla di algebra intendendo una famiglia di sottoinsiemi di Ω che abbia proprietà di *chiusura* rispetto ad alcune operazioni insiemistiche quali l'operazione di unione finita e di passaggio da un evento E al complementare E^c. Questa prende il nome di σ-algebra se invece che "finito" si parla di "numerabile".

è una (misura di) Probabilità se soddisfa i seguenti assiomi:

- $\mathbb{P}(E) \geq 0$ per ogni evento $E \in \mathcal{F}$;
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- $\mathbb{P}(\cup_j E_j) = \sum_j \mathbb{P}(E_j)$ con $E_j,\ j = 1....N$, eventi a due a due incompatibili (cioè tali che $E_i \cap E_j = \emptyset$, se $i \neq j$).

Nota: Nel caso in cui abbiamo un'infinità numerabile di eventi il terzo assioma viene chiamato proprietà della *completa additività*.

Come abbiamo già detto, tali proprietà non sono proprie solo della definizione assiomatica (e di quella soggettiva) ma sono comuni a **tutte** le assegnazioni: esse sono peraltro in genere facilmente verificabili.

La definizione assiomatica, anche a prescindere dagli aspetti critici relativi alla opportunità o meno di postulare l'assioma della completa additività, non propone alcun significato (né operativo né intuitivo) al concetto di probabilità. Come tutti i sistemi di assiomi ci dà la possibilità di avere, coerentemente e correttamente, alcune proprietà derivate (ad es., dal terzo assioma si deduce subito che $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$, si può passare al caso "continuo", ecc...).

Al di là quindi dell'ovvia richiesta di essere un patrimonio scientifico e culturale dell'insegnante, questi assiomi prescindono completamente dagli aspetti concettuali: essi non dicono alcunchè circa il significato stesso della (misura di) probabilità appena definita.

Veniamo quindi a ricordare due delle altre "definizioni", che *definizioni* non sono e che, per ogni altra istanza, se non nell'aspetto *operativo*, differiscono profondamente dalla definizione (soggettiva) enunciata all'inizio.

Solitamente nella scuola la probabilità viene introdotta ([5]) sulla base della "definizione" *classica* o della "definizone" *frequentista*.

Vediamole da vicino:

- **Definizione classica**: La probabilità di un evento E è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli (al verificarsi dell'evento) e il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano *ugualmente possibili*.
- **Definizione frequentista**: La probabilità di un evento E è il *limite* della frequenza (relativa) dei successi, cioè del verificarsi dell'evento, quando il numero delle prove "tende" all'infinito.

Per la prima – "definizione" classica – è chiaro il difetto logico - circolare di definire la probabilità attraverso ...... la probabilità, anche se viene talora chiamata *equipossibilità* ! Laplace stesso, al quale dobbiamo questa prima, importante, definizione, se ne era accorto talché richiedeva che i " casi possibili" fossero *equivalent* (l'analogo, in francese, di equipossibili).

[5] nei programmi, cioè nei libri di testo

Nota: I due esempi della Figura ci possono aiutare a riflettere sul concetto di equiprobabilità: cosa ci si aspetta se lanciamo un dado 100 volte ? e se lanciamo 100 volte un gettone telefonico ?

La "definizione" frequentista, evidenziata particolarmente da Richard von Mises (1883 - 1953), era sorta per superare i guai logici che abbiamo indicato essere presenti nella definizione classica. Essa si aggancia a quella che era conosciuta come la "legge empirica del caso". Ma è evidente che la probabilità "empirica" si può applicare soltanto agli esperimenti ripetibili nelle stesse condizioni per un numero di volte relativamente elevato, sufficiente a stabilizzare la frequenza relativa. Da chiarire poi completamente il significato di "tende" (o espressioni simili) nella "definizione". (È chiaro che non è il limite usuale dell'analisi matematica e che deve essere inteso in modo sperimentale.)

Appare chiaro quindi che queste "definizioni" di probabilità **non** sono, dal punto di vista matematico, vere e proprie definizioni ma, come vedremo, possono essere veri e propri *strumenti operativi*.

Entrambe queste assegnazioni **non** sono poi sicuramente applicabili in molte situazioni quali, ad es., una partita di calcio, una operazione chirurgica, un acquisto di azioni in borsa o le previsioni del tempo.

Già nelle prime righe abbiamo detto che esse *devono* essere usate nella didattica nella scuola: vediamo perché e quale legame ci sia con la definizione soggettiva. Pertanto, anche se non possiamo considerarle *definizioni* esse però possono essere "recuperate", almeno nel loro aspetto operativo. Prima di vedere come cerchiamo di capire il senso di quello che stiamo facendo, attraverso esempi elementari – ma sempre per i docenti – dell'uso della definizione soggettiva.

Nell'ambito dell'impostazione soggettiva sviluppata da Bruno de Finetti, che ha il grosso merito di essere applicabile per tutti gli eventi ed in tutte le circostanze, si mantengono rigorosamente distinti gli aspetti oggettivi (concernenti gli eventi) da quelli soggettivi (concernenti le valutazioni probabilistiche), vale a dire la logica del certo dalla logica del probabile. La metodologia di de Finetti, basata sul principio di **coerenza**, consente di effettuare valutazioni probabilistiche su famiglie arbitrarie di eventi.

Abbiamo detto che la probabilità soggettiva è il "grado di fiducia che una persona **coerente** attribuisce al verificarsi di un evento". Allora, per rendere operativa questa idea si può sostenere che:

> *La probabilità di un evento E è il prezzo $\mathbb{P}(E)$ che si è disposti a pagare per vincere* 1 *nel caso che tale evento si verifichi e* 0 *in caso contrario, accettando, sempre per la condizione di coerenza, di accettare indifferentemente una delle due eventualità.*

Presenteremo alcuni Esempi di uso di tale definizione, rivolti agli insegnanti, dai quali quest'ultimi potranno trarre riflessioni e conseguenze didattiche.

Esempio 1 *Beppe è disposto a scommettere* 1 *contro* 5 *sul fatto che si verifichi un certo evento, (ad es., l'uscita del* 5 *lanciando un dado). Qual è la probabilità dell'evento ?*

Se deve "accettare indifferentemente" le due eventualità Beppe si rende conto che chi scommette sul numero 5 **non** *può versare la stessa somma di chi scommette sul* **non** 5 *ovvero sugli altri (cinque) numeri. Egli attribuisce pertanto, magari implicitamente, a tale evento una probabilità pari a* $\frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}$ *(circa il* 17%*). La frazione che esprime la probabilità ha numeratore uguale a quanto Beppe è disposto a puntare e denominatore pari alla somma versata da entrambi gli scommettitori.*

Nota: Il denominatore rappresenta anche quanto ciascuno dei due partecipanti alla scommessa incasserebbe a seguito della puntata. A questo valore ci si può arrivare attraverso discussioni e tentativi successivi.

La seguente tabella ci dà un'idea dei tentativi che possiamo fare.

lanci del dado	Spesa di A	Incasso di A	Guadagno di A
un solo lancio vincente	1 €	6 €	+5 €
un solo lancio perdente	1 €	0 €	−1 €
60 lanci	60 €	60 €	0 €
un solo lancio vincente	0.50 €	5.50 €	+5 €
un solo lancio perdente	0.50 €	0 €	−0.50 €
60 lanci	30 €	55 €	+25 €
un solo lancio vincente	2 €	7 €	+5 €
un solo lancio perdente	2 €	0 €	−2 €
60 lanci	120 €	70 €	+50 €

Supponiamo che il giocatore B scommetta sempre 5 €e che il giocatore A scommetta invece, in tempi diversi, 50c, 1 €, 2 € e pensiamo a tre situazioni distinte:

- una sola giocata in cui A vince;
- una sola giocata in cui A perde;

- 60 giocate consecutive; (in quest'ultimo caso, avendo un dado perfetto, supponiamo per semplicità che il numero 5 esca 10 volte: se esce "solo" 9 volte oppure 8, cambiano solo i conti ma non la sostanza del discorso).

La terza riga, *quella che dopo* 60 *lanci mi dà un guadagno uguale a zero* (e lo stesso sarebbe accaduto se i lanci fossero stati 100, 10 000 o 10^{24}) ci dà il senso del **principio di coerenza**: *nessun guadagno a priori per uno qualsiasi dei due scommettitori.*

L'esempio precedente ha allora risposto alla richiesta di assegnare la

Probabilità di ottenere il numero 6 *lanciando un dado.*

In questo caso, ragionando dal punto di vista dell'impostazione classica si può dire che i casi che noi – soggetto giudichiamo possibili sono 6 ed i casi favorevoli 1: e ciò ci permette di assegnare la probabilità $\mathbb{P} = \frac{1}{6}$.

Ciò non vuol dire però che i casi *logicamente* possibili siano soltanto 6: ne potremmo pensare di più: il dado che cade sullo spigolo, il dado che rimane fermo su un vertice, il dado nel tombino, $\cdots$; ma *soggettivo* vuol dire che il soggetto (o, se vogliamo, lo scommettitore) è **coerente** e, quindi, reputa razionalmente i 6 come i soli casi possibili od anche, come diceva la definizione classica, "equipossibili". Va da sè che se il nostro sperimentatore ha avuto altre informazioni sul dado (è mal costruito e dà 4 volte su 10 il numero 5 oppure che è sbilanciato sul 2, ...,), deciderà di conseguenza.

Nessuno giocherà mai su *Croce* **sapendo** che la moneta ha due Teste !

A quanto detto finora occorre aggiungere che **"coerenza"** significa corretta applicazione delle norme di calcolo e che la misura del grado di fiducia, cioè la valutazione di probabilità, viene fatta assegnando un numero compreso fra 0 e 1, attribuendo la probabilità 0 all'evento impossibile e 1 a quello certo.

Se, facendo lezione in classe di probabilità, un ragazzo –probabilmente perchè ha letto il giornale – chiedesse all'insegnante:

Nella presentazione della decima giornata del campionato di calcio di Serie A, sulla Gazzetta dello Sport c'è scritto che la vittoria della Fiorentina sul Napoli è data ad 1.70*: che cosa vuol dire ? quanto vinco se gioco* 10 *€? perchè invece all'agenzia di scommesse sotto casa c'è scritto* 1.85 *?*

Ebbene l'insegnante può, con a disposizione solo l'armamentario del programma già svolto, rispondere tranquillamente alle prime due questioni – esse sono un fatto tecnico ! – **ma non esaurientemente alla terza** essendo questa una domanda che riguarda l'essenza della definizione soggettiva. ([6])

[6]Una possibile spiegazione della differenza di quantificazione può essere data dicendo che un giornale fa una valutazione "statica" valida, ad es., per il giorno dopo mentre la valutazione dell'agenzia è "dinamica" e può, già dopo alcuni minuti, essere mutata.

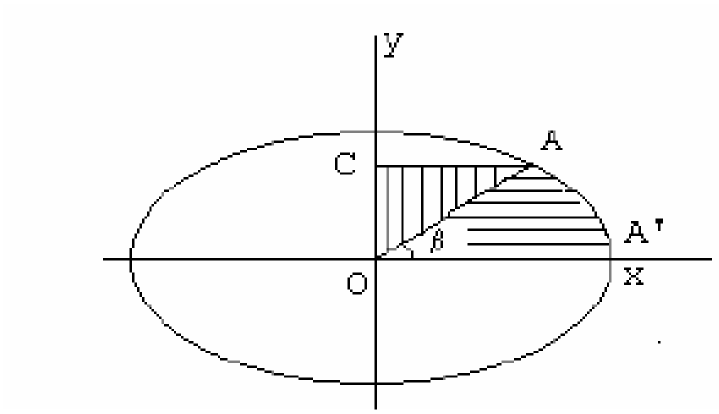
Circa il fatto che la valutazione sia un atto soggettivo, molto si potrebbe dire; interessa osservare che soggettivo non significa, come abbiamo potuto constatare, *arbitrario.* In realtà, appena vi siano premesse sufficienti, e ciò accade in situazioni ricorrenti, le valutazioni individuali tendono molto spesso a concordare per tutti gli interessati al medesimo problema.

Esempio 2 *: Ferdinando è disposto a scommettere* 1 *contro* 20 *sul fatto che suo figlio ottenga un bel voto nel compito scritto di francese: attribuisce cioè a tale evento una probabilità pari ad 1/21 (meno del* 5% *!). La situazione è analoga a quella di un sorteggio da un'urna con una pallina rossa e 20 palline nere. Tale valutazione dipenderà dalla conoscenza che Ferdinando ha del figlio, della sua carriera scolastica, della quantità di studio che gli ha visto fare, ecc... Tale valutazione è peraltro dinamica nel senso che sarà disposto a cambiarla appena il figlio arriva a casa con un voto molto alto* (nello stesso modo in cui uno scommettitore sportivo vede le quote aggiornate via via che la data della partita si avvicina !).

Un parallelo didattico: Se invece che di Calcolo delle Probabilità parlassimo di Analisi o di Geometria, la difficoltà della domanda precedente sarebbe certamente minore della seguente (che potrebbe però frequentemente esser posta):

Mia madre ha in giardino un'aiuola a forma di ellisse. Se volesse cingerla con una protezione di fil di ferro, quanto dovrebbe essere lungo il filo ?

La risposta più naturale da parte dell'insegnante potrebbe essere: *Si tratta di calcolare il perimetro di un'ellise. Noi abbiamo imparato a calcolare il perimetro di triangoli, poligoni, circonferenze,$\cdots$, ma non abbiamo gli strumenti matematici – che alcuni di voi vedranno forse solo in studi più avanzati – per calcolare il perimetro di una ellisse.* ([7]) .



In modo analogo se si parlasse dell'area di una ellisse. Nella figura, ad es., è disegnata un'ellisse con due parti tratteggiate: la loro area si può calcolare sempre ma solo per una delle due con con le formule della geometria della scuola primaria (o secondaria di primo grado).

Ebbene il concetto di probabilità soggettiva è, da questo punto di vista, analogo a quello del perimetro o dell'area dell'ellisse.

[7]Nel caso specifico, dovendosi calcolare un integrale ellittico di seconda specie, gli studi dovrebbero essere assai avanzati !

Una volta illustrata la definizione soggettiva vediamo perchè si utilizza invece, nei conti, una delle altre due definizioni.

Da quanto detto appare già evidente che dobbiamo lavorare non con tutti gli eventi ma solo con alcune (sotto) classi. Si possono cioè individuare alcune situazioni, peraltro anche piuttosto comuni che ci permettono di recuperare il ruolo delle altre impostazioni:

- l'esperimento presenta un numero finito di casi incompatibili (possibili), ciascuno di essi non ulteriormente "scomponibile" per i quali noi **riteniamo**, in base alle nostre informazioni ed alla nostra esperienza, di attribuire la stessa probabilità. Siamo cioè nel caso dell'equiprobabilità;
  si può usare l'assegnazione classica

  Esempio 3 *Si ha un mazzo di carte nuovo. I casi $E_k, k = 1, \cdots, 52$ ciascuno dei quali rappresenta una carta sono incompatibili (se estraiamo l'Asso di Picche non estraiamo il Re di Quadri !) e non ulteriormente scomponibili (come sarebbe, ad es., l'evento "estraggo una figura"). Il mazzo nuovo ci può garantire la equiprobabilità.*

- l'esperimento presenta N prove alle quali possiamo ritenere di assegnare la stessa probabilità ma non possiamo dire se sono incompatibili e neppure se sono esaustive. Supponiamo però che il numero di "successi" sulle N prove sia lo stesso **(non dipenda cioè da quali prove si ha un successo, ma da quante)**. In tal caso si può dimostrare, per una proprietà che de Finetti ha chiamato *scambiabilità*, che l'assegnazione frequentista ci dà lo stesso risultato che ci darebbe la definizione soggettiva.
  si può usare l'assegnazione frequentista.

  Esempio 4 *Consideriamo le estrazioni* **con** *o* **senza** *restituzione di* 5 *palline da un'urna che ne contiene* 10, *di cui* 7 *Bianche e* 3 *Nere. Consideriamo ancora la successione di eventi $E_j = \{$ pallina Bianca alla j-sima estrazione$\}$ e calcoliamo la probabilità di avere k successi (ovvero palline Bianche). Possiamo vedere ([8])*

In questo modo si può – *anzi si deve* – utilizzare la "definizione" classica o la "definizione" frequentista negli esempi e negli esercizi in classe. E non c'è quindi bisogno di dare alcuna definizione.

Nota didattica: Tornando al parallelo analitico - geometrico visto sopra, utilizzare la definizione soggettiva per calcolare la probabilità di *somma* 9 lanciando due dadi, sarebbe come utilizzare l'integrale di Riemann per calcolare

[8] Nel caso di estrazione con restituzione abbiamo $\mathbb{P} = \binom{5}{k} p^k (1-p)^{5-k}$; nel caso senza restituzione si ha $\overline{\mathbb{P}} = \frac{\binom{7}{k}\binom{3}{5-k}}{\binom{10}{5}}$. Dunque la probabilità cercata dipende *solo* da k e non dai particolari eventi considerati. Gli eventi individuati dalle estrazioni sono dunque *scambiabili*.

l'area di un triangolo: si può fare ma è come usare un furgone per andare .... a fare la spesa al mercatino !

E, nel contesto detto, i "giochi" (carte, monete, palline, $\cdots$) sono il primo strumento didattico in quanto si presuppone su di essi una informazione completa (ovvero il dado è "equilibrato", il mazzo è "nuovo", ecc...) e quindi lo sperimentatore viene messo in grado di poter decidere circa l'equiprobabilità degli eventi da studiare. Questo è uno dei motivi, anche se non il solo, per cui si usano *i giochi* come contesti didattici nell'iniziare a trattare col Calcolo delle Probabilità.

L'insegnante può dunque far vedere le proprietà della probabilità, applicando lo strumento dell'assegnazione classica o frequentista, proprietà che abbiamo già detto essere comuni a tutte le impostazioni.

*
*   *

Nota *(didattica)* finale Non sempre i fenomeni casuali si presentano in modo chiaro, con un bell'elenco di casi possibili, tutti ugualmente possibili, fra i quali selezionare quelli favorevoli e poi fare i conti.

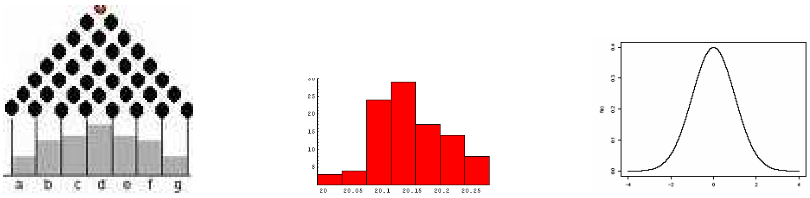
Pensiamo a quel che poteva passare per la testa ad Ike Eisenhower circa l'esito dello sbarco in Normandia la sera prima che fosse effettuato ed a quel che possiamo pensare noi anche qualora supponessimo di avere tutte le informazioni circa le forze in campo. La Storia c'insegna che le cose possono andare nel modo più impensato. Ovviamente non è possibile chiedere ai soldati di ripetere la battaglia (neanche per decine di volte), in modo da ottenere le frequenze relative, resuscitando ogni volta i morti per ristabilire le stesse condizioni di partenza !

Un'ulteriore considerazione può essere fatta per l'uso della "definizione" frequentista, utilizzando questa volta come strumento didattico essenziale e forte la *statistica descrittiva* e ciò che essa è in grado di darci in termini di dati, rappresentazioni, sintesi ecc... Per questo ha assunto grande importanza la considerazione *empirica* che, per i semplici casi in cui si sa calcolare la probabilità mediante ragionamenti di simmetria o di "ragion insufficiente"([9]), si nota che la frequenza relativa è in genere prossima al valore di probabilità congetturato a priori.

Questo tipo di osservazioni sperimentali ha condotto ad enunciare la ben nota, talora non ben interpretata, *legge empirica del caso*:

[9]dovuto a Laplace: In breve, esso affermava che dobbiamo assegnare la stessa probabilità a due eventi se non esistono ragioni per decidere altrimenti.

In una serie di prove ripetute un gran numero di volte nelle stesse condizioni, ciascuno degli eventi possibili si manifesta con una frequenza relativa che è circa uguale alla sua probabilità. L'approssimazione migliora con l'aumentare del numero delle prove.



La Figura sopra cerca di dare un'idea intuitiva di quel che può accadere via via che si aumenta il numero delle prove, come evidenziato anche dalle rappresentazioni grafiche.

Questo è un altro dei motivi per cui si consiglia di iniziare a trattare la Statistica (descrittiva) da subito, fin dai primi anni della scuola primaria, facendo poi seguire le prime considerazioni probabilistiche come uno sviluppo naturale.

Anche in questo caso, seguendo ancora de Finetti, sarà sufficiente chiederci: *i casi sono equiprobabili ? i casi sono scambiabili ? cioè è importante il "quanti" e non i "quali" ?*

Se il soggetto risponde positivamente a tali interrogativi, sta calcolando la probabilità dell'evento in questione con la definizione soggettiva utilizzando però (correttamente) lo strumento assegnazione classica (o frequentista).

Alcuni Testi di riferimento

1. Matematica 2001, *La Matematica per il cittadino. Attività e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica. Scuola primaria e scuola secondaria di primo grado,* Unione Matematica Italiana, MPI, 2001

2. Matematica 2003, *La Matematica per il cittadino. Attività e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica. Primi quattro anni del ciclo secondario,* Unione Matematica Italiana, MPI, 2003

3. Giuseppe Anichini *Calcolo 4 – Elementi di Calcolo delle Probabilità e di Inferenza Statistica,* Pitagora, Bologna, 1996,

4. Giorgio Dall'Aglio *Calcolo delle Probabilità,* Zanichelli, Bologna, 1987,

5. Bruno de Finetti, *Filosofia della probabilità,* Il Saggiatore, Collana Theoria, Milano, 1995,

6. Carla Rossi *La matematica dell'incertezza. Didattica della probabilità e della statistica,* Zanichelli, Bologna, 1999,

7. Romano Scozzafava *Incertezza e probabilità. Significato, valutazione, applicazioni della probabilità soggettiva* Zanichelli, Bologna, 2002.